$T: V^n \to W^m$ γρ. απ.

T μονομορφισμός $\Rightarrow T: 1\text{-}1 \Leftrightarrow \ker T = \{\bar{0}\}$

T επιμορφισμός $\Leftrightarrow T(V) = W$

T ισομορφισμός $V^n \cong W^n$

V βάση $= \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow$

$T(V) \underset{\text{παράγει}}{=} \underbrace{\langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle}_{\text{πότε γίνεται βάση}}$

Θεώρημα: Έστω $T: V^n \to W^m$ γρ. απ.
τότε ισχύει $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$

Απόδειξη: Έστω $\{v_1, \dots, v_k\}$ μια βάση του $\ker T$

$\ker T \leq V$ $\quad \operatorname{Im} T = T(V) \leq W$

Προσθέτουμε διανύσματα στη βάση του $\ker T$ ώστε να γίνει βάση όλου του χώρου

V βάση $= \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$

$\operatorname{Im} T = T(V) = \langle T(v_1)^{=\bar{0}}, \dots, T(v_k)^{=\bar{0}}, T(v_{k+1}), \dots, T(v_n) \rangle = \langle T(v_{k+1}), \dots, T(v_n) \rangle$

Αρκεί είναι γρ. ανεξ.

Αρκεί νδο αυτά είναι γρ. ανεξ. Ας υποθέσουμε ότι είναι γρ. εξαρτ.

$a_1 T(v_{k+1}) + \dots + a_{n-k} T(v_n) = \bar{0}$ τότε

$T(a_1 v_{k+1} + \dots + a_{n-k} v_n) = \bar{0} \Rightarrow$

$a_1 v_{k+1} + \dots + a_{n-k} v_n \in \ker T = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

κ' $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ γρ ανεξ. άτοπο.

$\dim V = n = k + n - k = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$

Π.χ $T: \mathbb{R}^{1000} \to \mathbb{R}^1$

$T(v) = \bar{0}$

Π.χ Ν6 μια βάση της εικόνας της $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $T((x,y,z) = (x+y, 2x-z, z-x+y)$

Ν.6 βάση του $\ker T$.

$T(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$(x+y, 2x-z, z-x+y) = (0,0,0)$

$x+y=0 \Rightarrow y=-x$

$2x-z=0 \Leftrightarrow z=2x=-2y$

$z-x+y=0 \Rightarrow -2y+y+y=0$

$0=0$

$(x,y,z) \in \ker T \Leftrightarrow (x,-x,2x) \in \ker T$

$x(1,-1,2) \in \ker T = \langle (1,-1,2) \rangle$

Βάση του $\mathbb{R}^3$ $\langle (1,-1,2), (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

Θεώρημα $\Rightarrow T(\mathbb{R}^3) = \langle T(1,0,0), T(0,1,0) \rangle = \underbrace{\langle (1,2,-1), (1,0,1) \rangle}_{\text{βάση}}$

Επιλογή βάσεων ενός δχ. V

Π.χ $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle = \langle (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1) \rangle =$
$= \langle (1,0,-1), (0,-1,1), (0,1,0) \rangle$

$S_1 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

$S_2 = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1)\}$

$S_3 = \{u_1 = (1,0,-1), u_2 = (0,-1,1), u_3 = (0,1,0)\}$

Τυχαίο $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$

$(x,y,z)=\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,1)$

συναρτήσει του x,y,z

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha+\gamma\\ y&=\alpha+\beta\\ z&=\beta+\gamma \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} \alpha&=x-\gamma &&\Rightarrow \alpha=x-x-\beta+\gamma\\ y&=x-\gamma+\beta &&\Rightarrow \gamma=x+\beta-y\\ z&=\beta+x+\beta-y &&\Rightarrow \beta=\frac{z+y-x}{2} \end{aligned}$$

$$(x,y,z)=\frac{x+y-z}{2}v_1+\frac{y+z-x}{2}v_2+\frac{v+z-y}{2}v_3 \qquad \begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2}\\ \frac{y+z-x}{2}\\ \frac{x+y-y}{2} \end{pmatrix}_{S_2}$$

$$(x,y,z)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,-1,1)+\gamma(0,1,0) \qquad \begin{pmatrix} x\\ z+x\\ x+y+z \end{pmatrix}$$

$\underline{x=\alpha}$

$y=-\beta+\gamma \Rightarrow \gamma=y+z+x$

$z=-\alpha+\beta \Rightarrow \beta=z+x$

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x+y+z}{2}\\ \frac{-x+y+z}{2}\\ \frac{x-y+z}{2} \end{pmatrix}_{S_2} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x\\ z+x\\ x+y+z \end{pmatrix}_{S_3}$$

$\parallel$

$e_1+ye_2+ze_3$

$\parallel$

$$\frac{x+y-z}{2}v_1+\frac{-x+y+z}{2}v_2+\frac{x-y+z}{2}v_3$$

$$xv_1+(x+z)v_2+(x+y+z)v_3$$

<u>Ερωτήσεις:</u> 1) Υπάρχει κάποιος εύκολος τρόπος να περνάμε από τη μία βάση στην άλλη;

2) Γιατί το χρειαζόμαστε αυτό;

Αναπαράσταση γραμμικής απεικόνισης με πίνακα

Έστω $T: V^n \to W^m$ μια γρ. απεικ. κ' $S_1=(v_1,\dots,v_n)$ κ' $S_2=(w_1,\dots,w_m)$ δύο διατεταγμένες βάσεις των V κ' W αντίστοιχα.

Έστω $T(v_i)=a_{1i}w_1+a_{2i}w_2+\dots+a_{mi}w_m$

Η αναπαράσταση του $T(v_i)$ ως προς τη βάση S_2 είναι η στήλη $\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\ \vdots \\ a_{mi}\end{pmatrix}$

Βρίσκουμε τις στήλες για όλα τα $i=1,\dots,n$

Ο πίνακας της T ως προς τις βάσεις S_1 κ' S_2 έχει σαν στήλες τις αναπαραστάσεις των στοιχείων $T(v_1), T(v_2),\dots, T(v_n)$.

Συμβολίζεται με (T,S_1,S_2).

$$(T,S_1,S_2)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}\end{pmatrix}$$

π.χ. Ν.Β. ο πίνακας της $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(x-z,2x-3y,x+y+z)$ ως προς τις κανονικές βάσεις κ' ως προς τις S_2 κ' S_3 του προηγούμενου π.χ

Λύση: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $T(x,y,z)=(x-z,2x-3y,x+y+z)$

$\langle e_1,e_2,e_3\rangle \to \langle e_1,e_2,e_3\rangle$

$T(S_1,S_1)=;$

$T(e_1)=(1,2,1)=1e_1+2e_2+1e_3$

$T(e_2)=(0,-3,1)=0\cdot e_1-3e_2+1\cdot e_3$

$T(e_3)=(-1,0,1)=-1e_1+0e_2+1e_3$

$$T(S_1,S_1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-3&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{S_1}$

$$(T,S_1,S_1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-3&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\2x-3y\\x+y+z\end{pmatrix}_{S_1}$$

Θέλουμε τον $(T, S_2, S_3) = ;;;$

$T(u_1) = T(1,1,0) = (1,-1,2) = 1u_1 + 3u_2 + 2u_3$

$T(u_2) = T(0,1,1) = (-1,-3,2) = -1u_1 + 1u_2 + 2u_3$

$T(u_3) = T(1,0,1) = (0,2,2) = 0u_1 + 2u_2 + 4u_3$

$$(T, S_2, S_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad ++$$

Ερώτημα: Πώς σχετίζονται οι πίνακες (T, S_1, S_1) κ' (T, S_2, S_3) μεταξύ τους;

Πίνακας αλλαγής βάσης

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με $T(u) = u$ ταυτοτική.

Ποιος είναι ο πίνακας της;;;

Ως προς ποιες βάσεις;;;

S βάση $\xrightarrow{\text{ταυτοτική}}$ S βάση   Πίνακας ταυτοτικός.

Ν.Β. ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S_1 στην S_2 κ' από την S_2 στην S_3.

T = ταυτοτική : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

(T, S_1, S_2) $S_1 \to S_2$

(T, S_2, S_3) $S_2 \to S_3$

$T(e_1) = (1,0,0) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$

$T(e_2) = (0,1,0) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$

$T(e_3) = (0,0,1) = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$

$$(T, S_1, S_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\tau(1,1,0) = (1,1,0) = 1u_1 + 1u_2 + 2u_3$

$\tau(0,1,1) = (0,1,1) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 2u_3$

$\tau(1,0,1) = (1,0,1) = 1 \cdot u_1 + 2u_2 + 2u_3$

$$(\tau, S_2, S_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Π.Χ Ποιός είναι ο πίνακας της αλλαγής βάσης από την S_3 στην S_2;

(τ, S_1, S_2)

$\tau(w_1) = (1,0,-1) = 0v_1 - v_2 + 0v_3$

$\tau(w_2) = (0,-1,1) = -v_1 + 0v_2 + 1v_3$

$\tau(w_3) = (0,1,0) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$

$$(\tau, S_3, S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$